Modélisation stochastique des données à partir d'essais sur matériaux

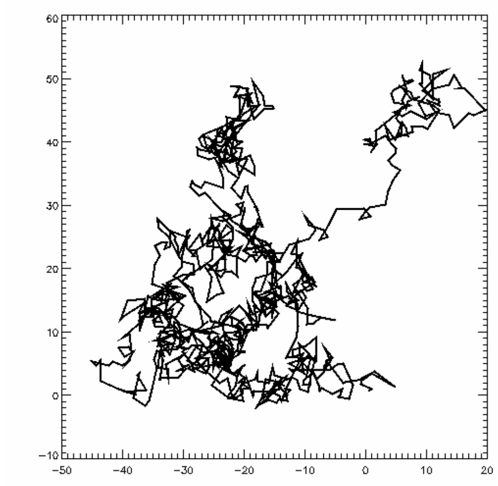
Pr. Denys Breysse
Université Bordeaux 1

Hasard

cause fictive de ce qui arrive sans raison apparente ou explicable *(Petit Robert).*

Ce qui relève “du hasard” est considéré comme hors de portée de la conscience humaine, imprévisible.

La question de l’existence intrinsèque du hasard et de la nature réelle du monde (déterministe ou non déterministe) demeure une question de philosophie des sciences, traitée par de nombreux auteurs comme Henri Poincaré ou Karl Popper (« Plaidoyer pour l’indéterminisme »).



marche au hasard (mouvement brownien)

Deux termes souvent pris pour synonymes

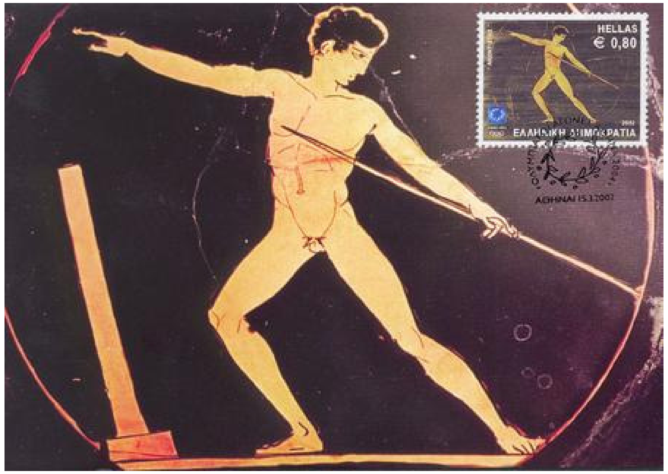
Alea - aléatoire :

en latin, « aleator » était le joueur de dé. On qualifie d'« expérience aléatoire une épreuve dans laquelle la répétition d'un même protocole conduit à différents résultats

Stochastique :

« stochastein », c'est viser et atteindre le but au javelot, sans calcul, mais avec une sûreté inexplicable.

C'est le « jeter juste », comme on dit d'un peintre qu'il a su "attraper le ton juste".



Caractère stochastique des propriétés des matériaux

manifestation expérimentale : dispersion des propriétés

- est-on capable d'estimer les propriétés (moyenne, dispersion, valeurs « risquées ») ?

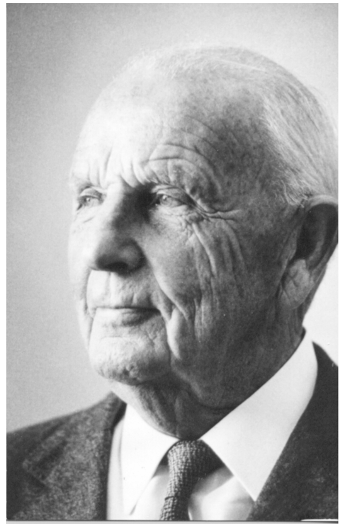
- avec quel degré de précision ?

- peut-on « prédire » le comportement du composant/ouvrage qui découle de ces propriétés ?

1. Approche empirique globale

Wallodi Weibull (1887-1979) : mise en évidence de la distribution statistique de Weibull

aciers suédois de Bofors, fibres de coton hindou, graines de phaseolus vulgaris, adultes mâles des Iles Britanniques…



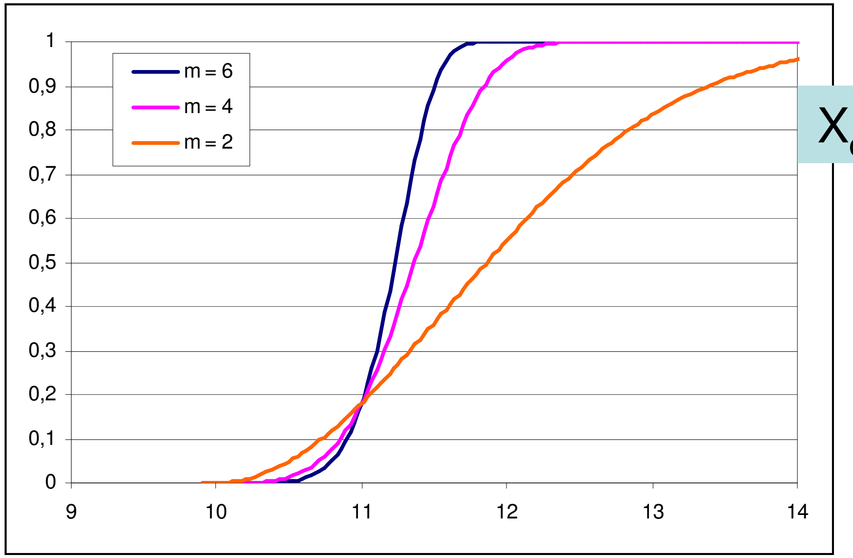
"En Statistisk Teori För Utmattmingshallfastheten", 1948

si $X > x_o$

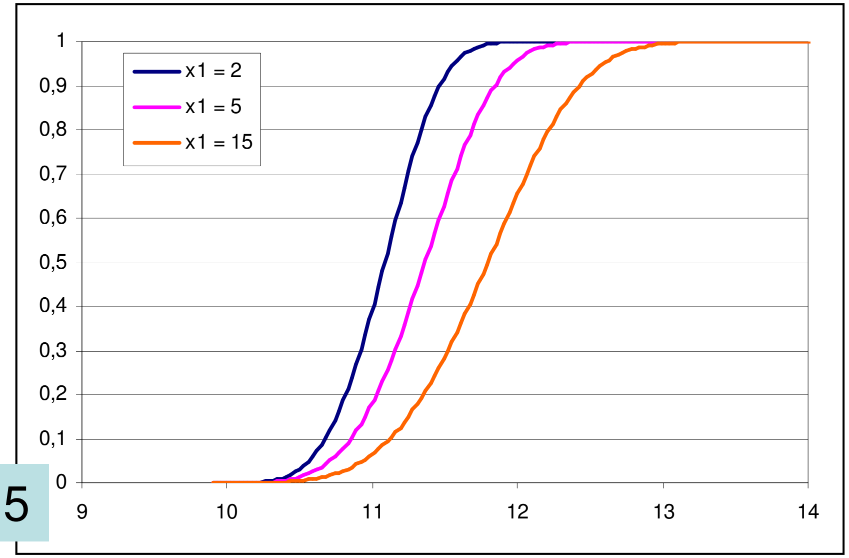
$p\ (X < x) = 1 – \exp\ (\ -\ (x-x_o)^m /\ x_1\ )$

Cas particulier $x_o = 0$

$p\ (X < x) = 1 – \exp\ (\ -\ x^m /\ x_1\ )$



$X_o = 10 , X_1 = 5$

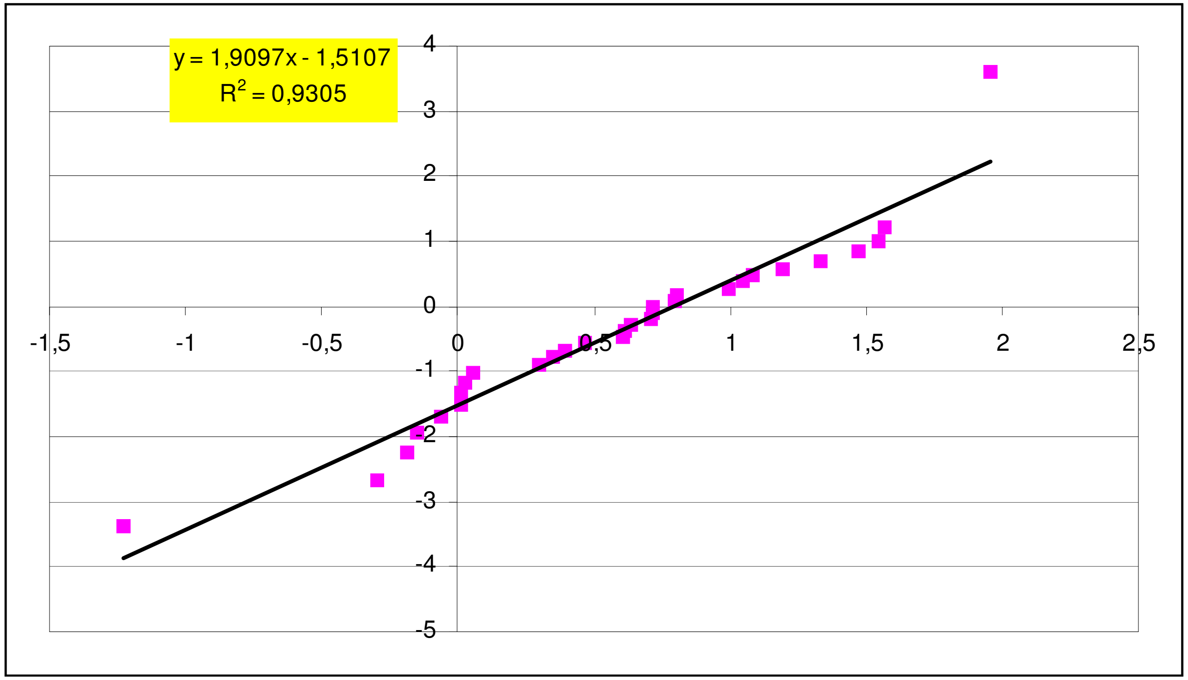


$X_o = 10, m = 5$

Une loi « en S » qui a le mérite de bien « coller » à toute courbe en S par ajustement des trois paramètres.

Ajustement aisé dans le cas où $x_o = 0$

Exploitation de 30 mesures générées selon Weibull
avec $X_o = 0$, $X_1 = 5$, $m = 2$



$$\ln(\ln(1/(1-pF)) = m \ln x - \ln X_1$$

$$\rightarrow X_1 = 4.53,\ m = 1.91$$

En 1951, relation établie entre la distribution de Weibull et la résistance d'une chaîne de N maillons (weakest link concept)

➔ justification mécanique à une distribution empirique

➔ nombreuses applications en fiabilité des systèmes, en mécanique de la rupture des matériaux fragiles

Développements en micro-mécanique aléatoire (distribution de tailles/d'orientations de défauts)

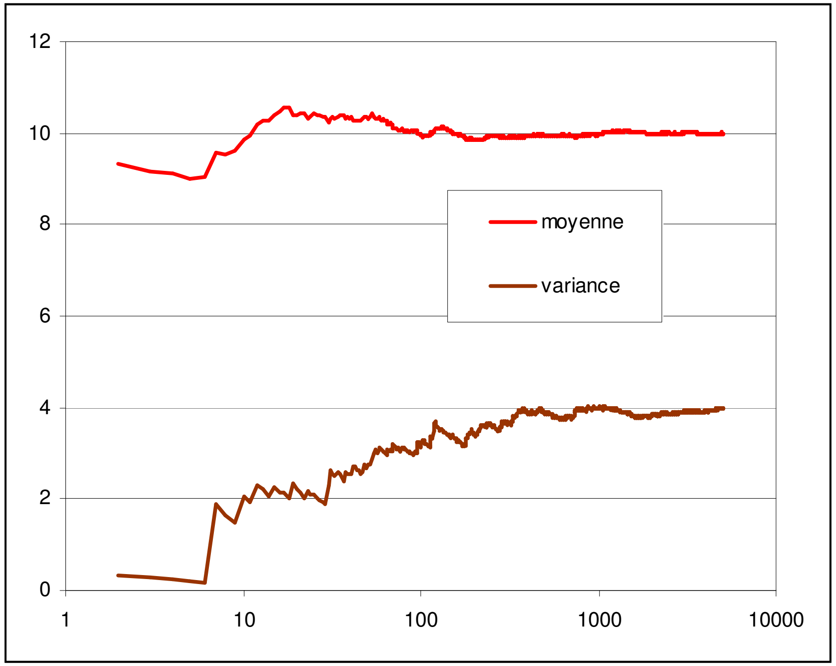
2. Estimation des propriétés

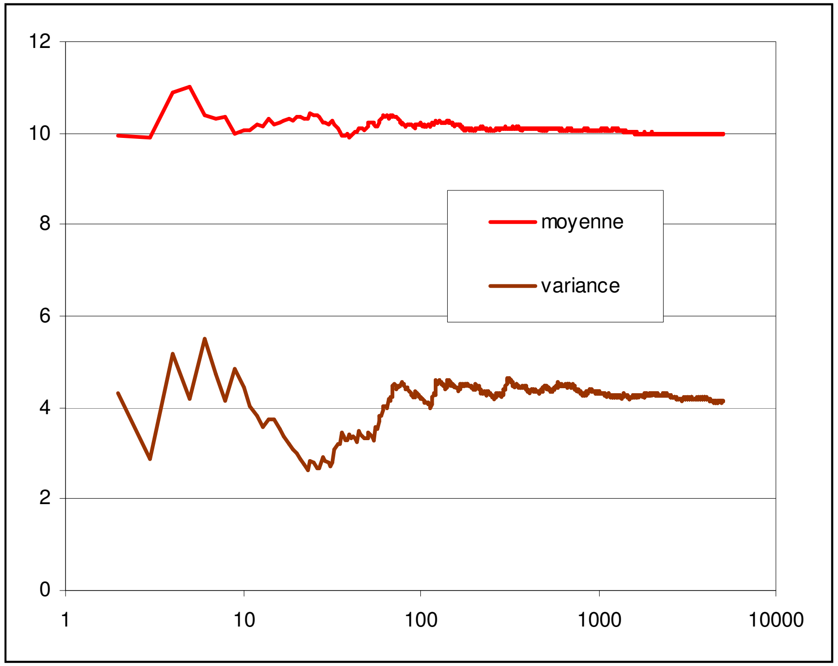
On dispose de n valeurs, « tirées au hasard » dans une population
dont on ne connaît pas la distribution

➔ Hypothèses sur la forme de la distribution
(gaussien, log-normal, Weibull…)

➔ Lois d'estimation (théorie de l'échantillonnage)

Exemple : simulations d'un échantillon de n valeurs, selon une loi gaussienne (10, 2)

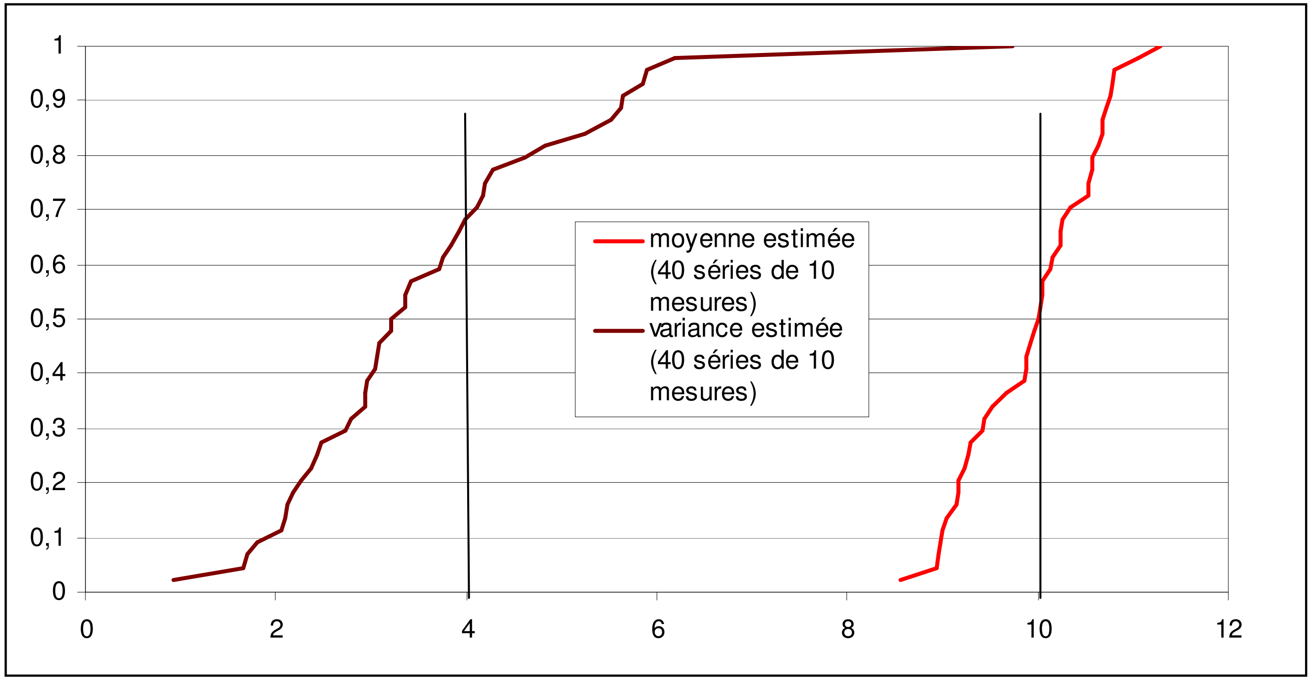




Convergence lente

Les valeurs obtenues pour n fini ne sont que des approximations des valeurs vraies

Distribution des moyenne et variance pour 40 séries de 10 mesures



Estimation de la moyenne

Si x suit une loi normale de *variance σ^2 connue*

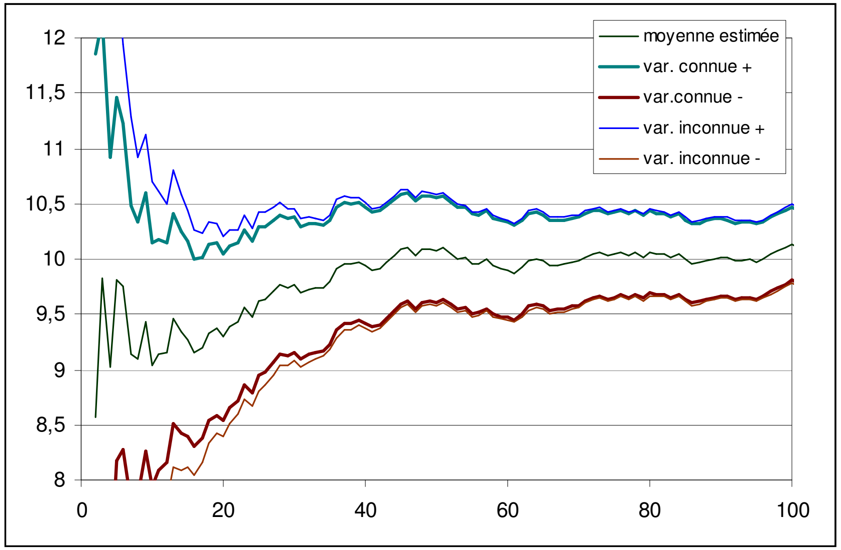
$$[\, X - z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n-1} \leq \mu \leq X + z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n-1}\,] \text{ au seuil } 1 - \alpha$$

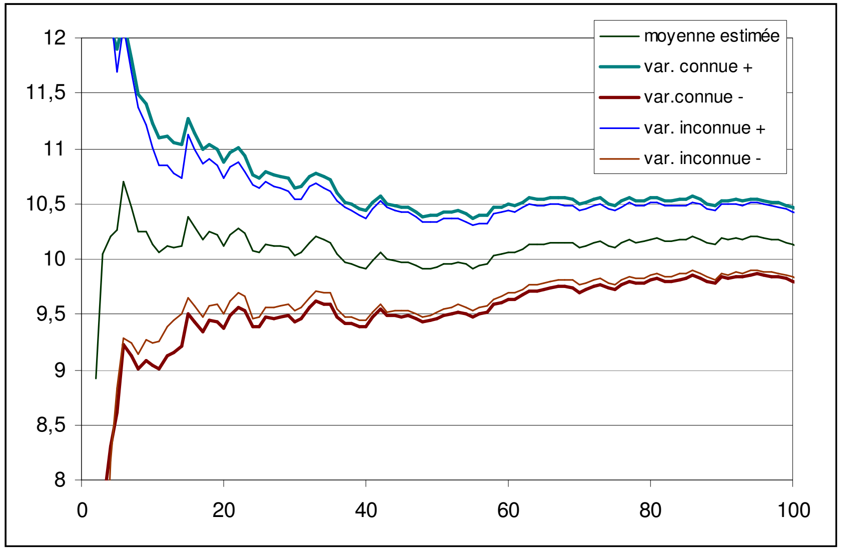
où X est la moyenne estimée et où σ^2 est la variance connue

Si x suit une loi normale de *variance inconnue*

$$[\, X - t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n-1} \leq \mu \leq X + t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n-1}\,] \text{ au seuil } 1 - \alpha$$

où X est la moyenne estimée et où s^2 est la variance estimée





Estimation d'une valeur « risquée », par exemple fractile à 5 %

« intervalle statistique de dispersion unilatéral »

Si x suit une loi normale de *variance σ^2 connue*

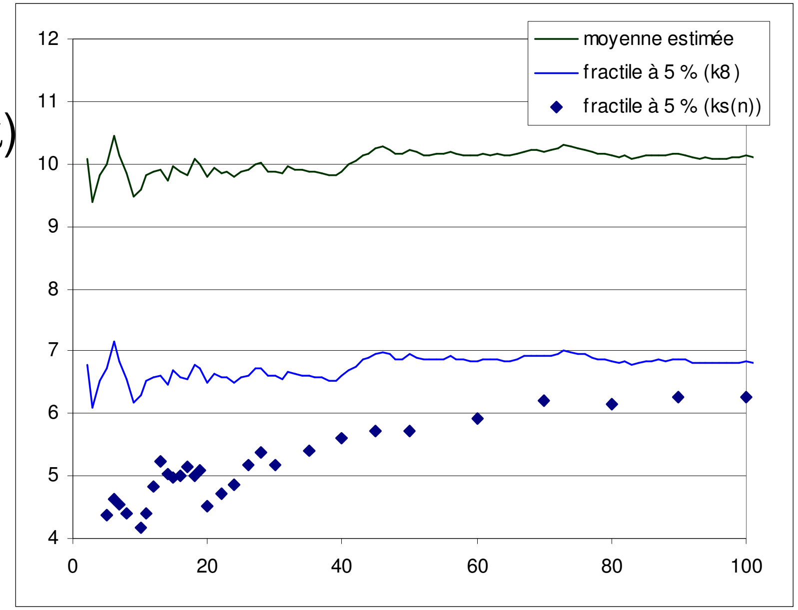
$$X_k = \mu - u_k \sigma$$

où μ est la moyenne et où σ^2 est la variance connue
(par exemple = 1.645 pour le fractile à 5 %)

Mais en pratique, ni μ ni σ ne sont connues

$$X_k = X - k_s s \quad \text{avec } k_s = \text{fct}(u_k, n, \text{risque } \alpha)$$

(Norme NF X 06-032)



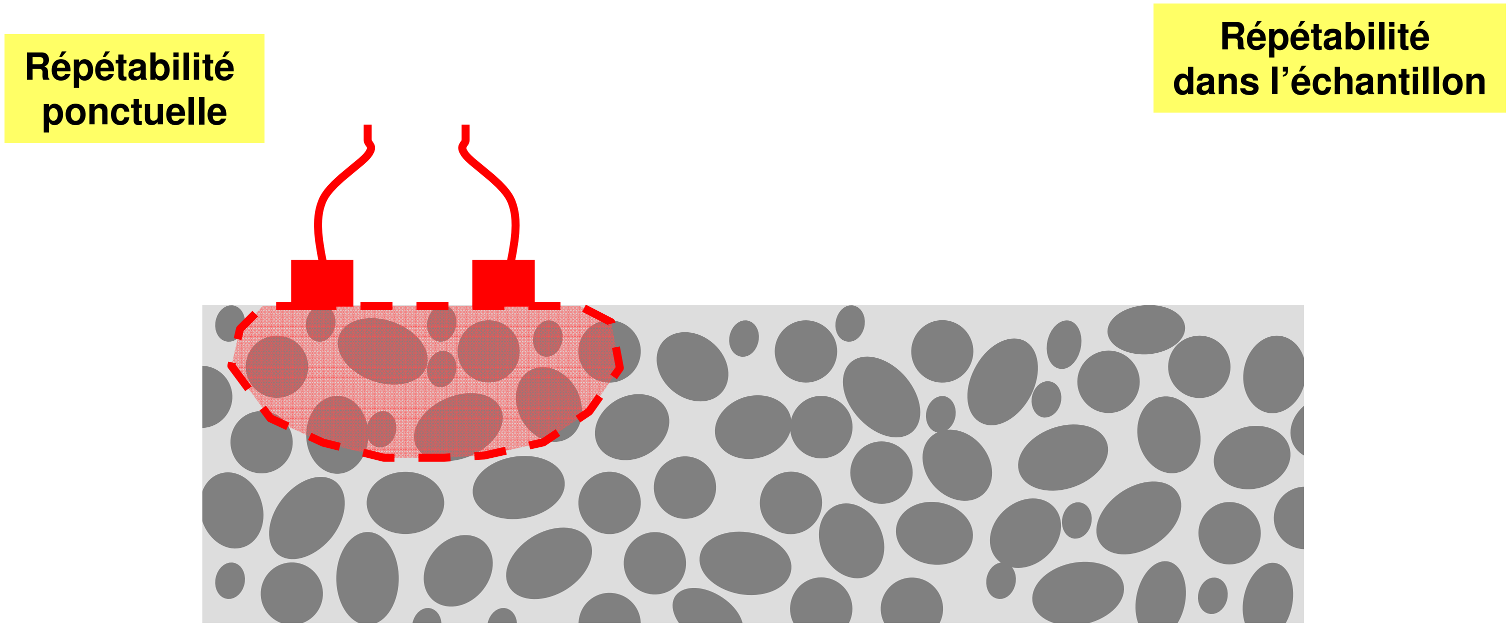
3. Identification des propriétés et simulation

Idée :
- on dispose d'un modèle $Y = f(X_i)$
- on cherche à identifier les distributions statistiques de X_i
- on les utilise dans le modèle pour prédire la distribution statistique de Y

Questions d'intérêt :
- qualité du modèle
- qualité de l'identification des distributions des variables d'entrée
- qualité de la prédiction

A propos des incertitudes :

- rôle de la variabilité « naturelle » ➔ représentativité d'une mesure « «ponctuelle » Y ➔ incertitude aléatoire (en un point, dans un échantillon, entre échantillons)



- variabilité-incertitude ➔ incertitude modèle ➔ incertitude épistémique

Par exemple : *détermination de la porosité et du taux de saturation*

Résistivité : $\rho = c\ p^{-m}\ S^{-n}$ ➔ incertitude sur les valeurs des exposants
Capacimétrie : $f = a - b\ S$ ➔ incertitude sur les constantes

Capacimétrie : $f = a - b\ S$ ➔ $S = (f - a)/b$

incertitude de mesure sur f
ET incertitude sur (a, b)

➔ incertitude sur S

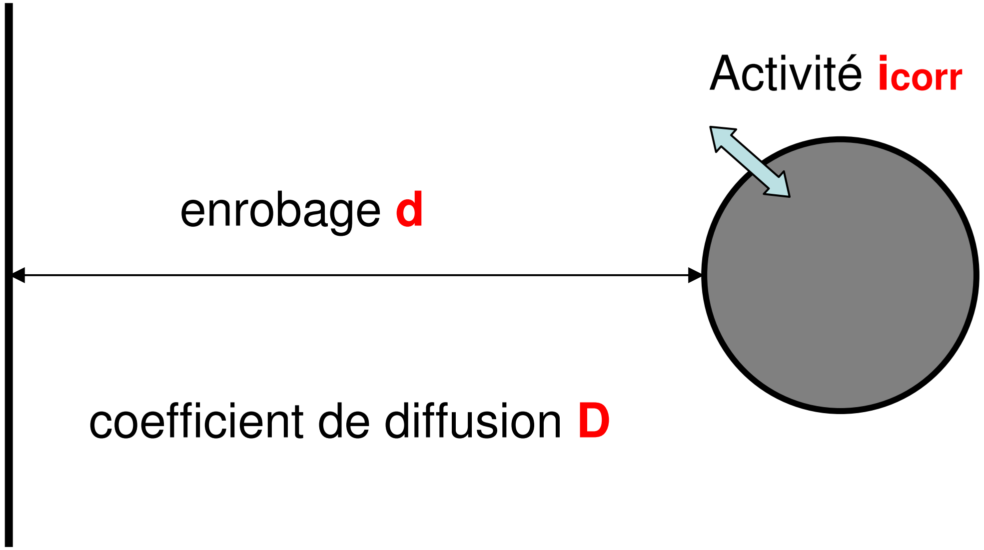
Résistivité : $\rho = c\ p^{-m}\ S^{-n}$

incertitude sur S

+ incertitude de mesure sur la résistivité
ET incertitude sur (m, n)

➔ incertitude sur p

Application : modèle de diffusion des chlorures et d'amorçage de la corrosion dans le béton armé



Modèle d'amorçage : $x_{crit} = k \sqrt{D \quad t} \Rightarrow t_{init} = d^2 / k^2 D$

Modèle de propagation : $p_x = k' i_{corr} \, (t - t_{init})$

Modèle d'amorçage : $x_{crit} = k \sqrt{D \quad t} \Rightarrow t_{init} = d^2 / k^2 D$

Paramètre de modèle

Propriétés (aléatoires)
du matériau

Peuvent être évaluées (CND)

hypothèses

Paramètre de modèle k supposé connu, exact = 50

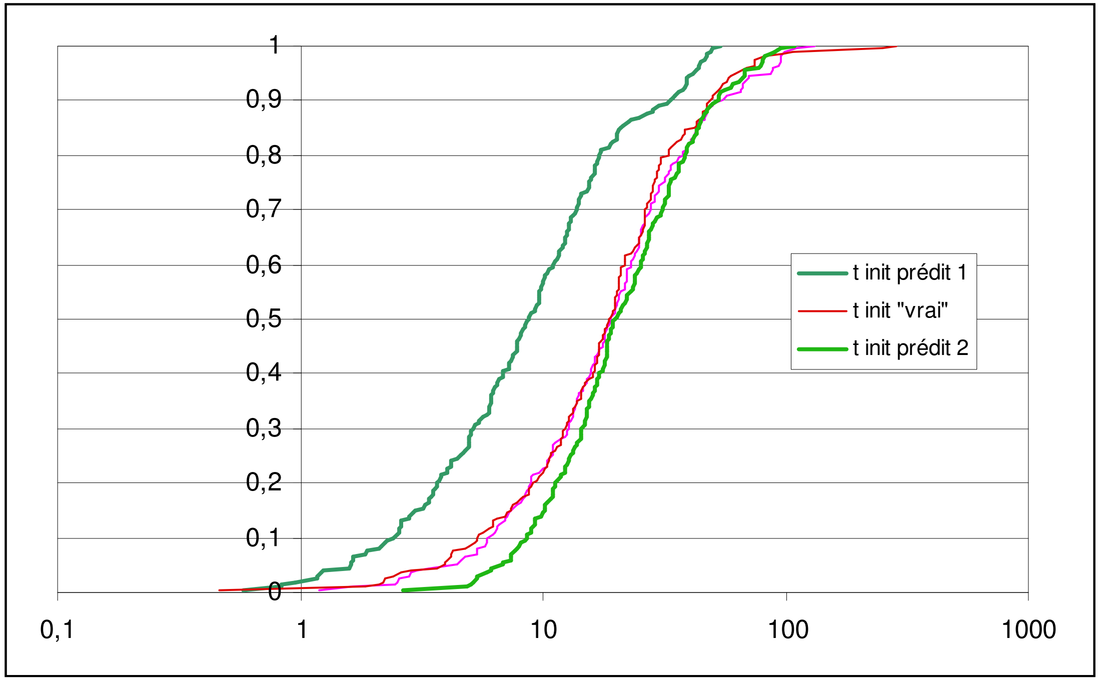
Enrobage = gaussien (moy 2 cm, e.t. 0,5 cm)

Coeff Diffusion = log normal (moy(lnD) = 0.96, e.t.(lnD) = 0.66)) $(\mathrm{x}10^{12})$

On fait 10 mesures de d et D, à partir desquelles on POSTULE les paramètres des lois de distribution, et on simule t init

Résultats sur 200 Simulations

Rôle de l'échantillon



Le rôle de l'erreur de mesure et de l'incertitude de modèle

Modèle identifié d'après l'analyse statistique de mesures sur échantillons

$V_{US} = a_1\, p + a'_1\, S + b_1$

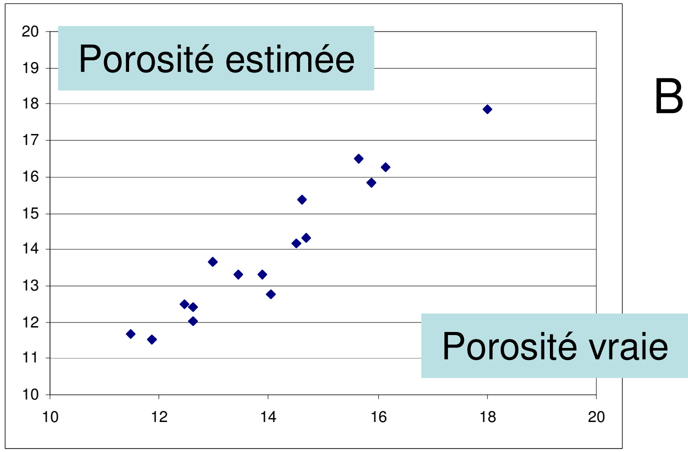
$A_{radar} = a_2\, p + a'_2\, S + b_2$

Principe : mesure de V_{US} et de A_{radar} et inversion du système pour déterminer p et S

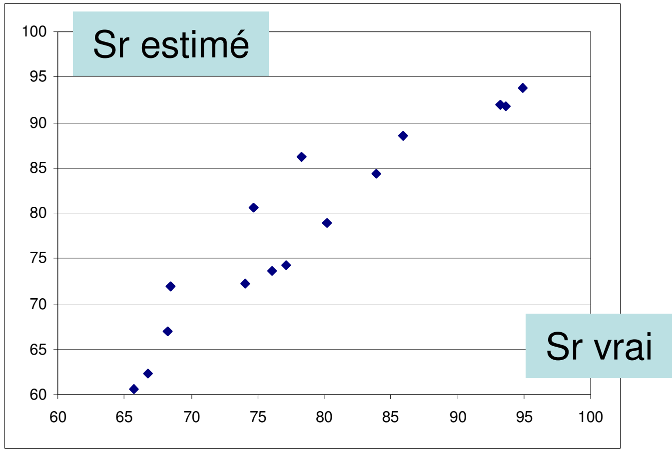
Mais…

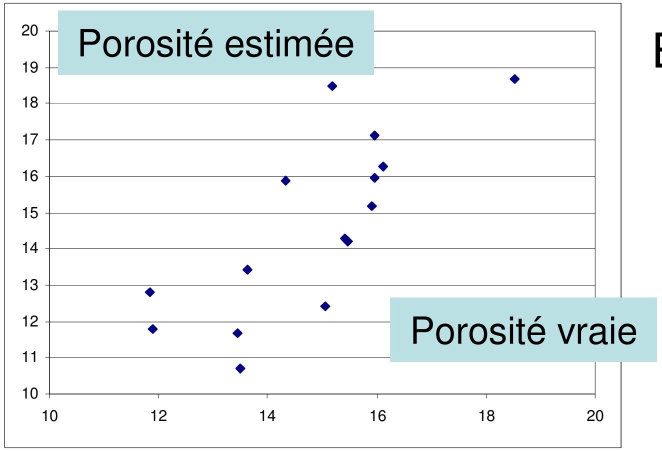
- Erreurs de mesure : $V_{US\ mesuré} \neq V_{US\ vrai}$, $A_{radar\ mesuré} \neq A_{radar\ vrai}$
- Incertitudes de modèle sur les coefficients a_i, a'_i, b_i

Influence de l'erreur de mesure

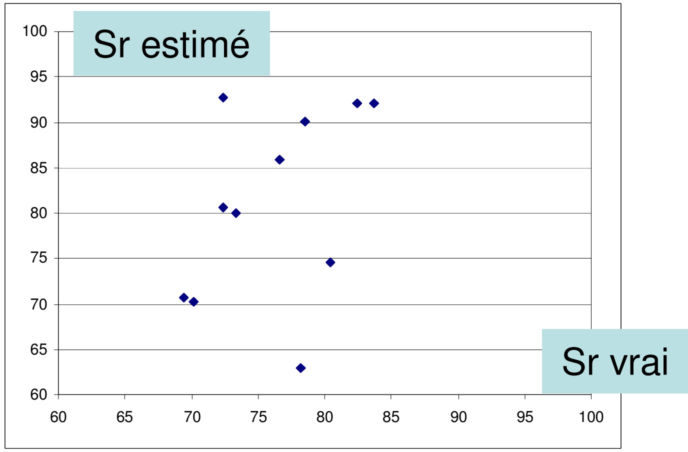


Bruit de mesures 1%

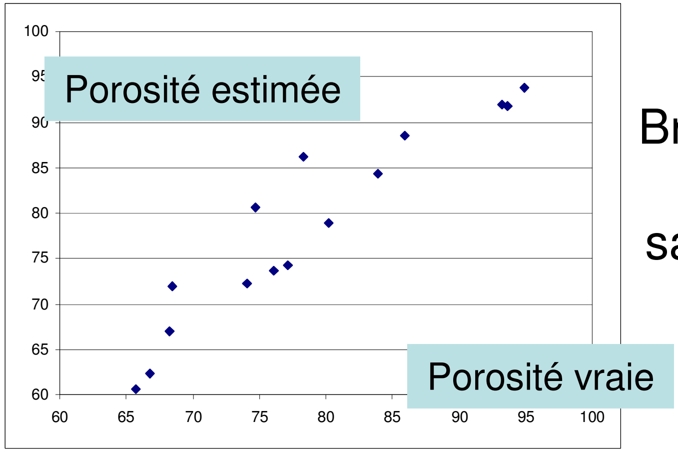


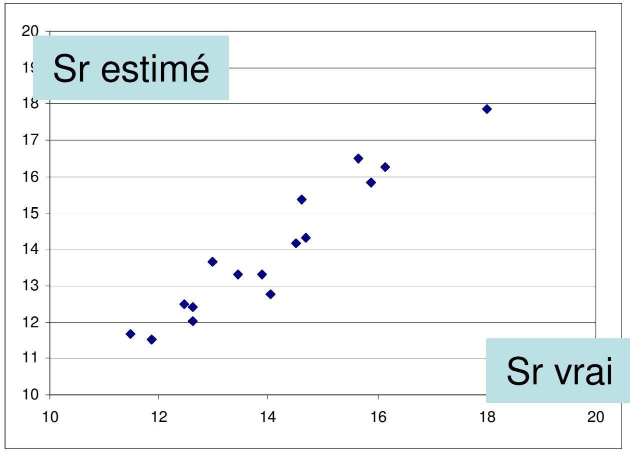


Bruit de mesures 3%

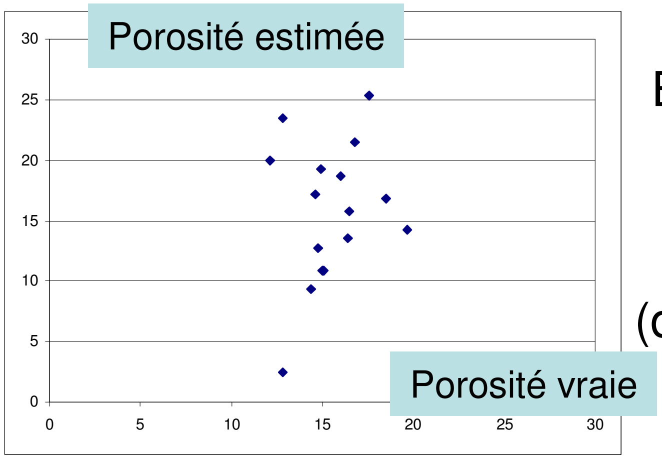


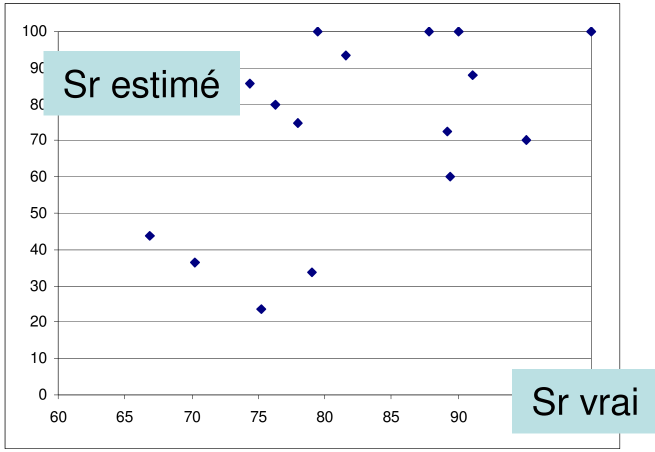
Influence de l’incertitude de modèle





Bruit de mesures 1% sans incertitude de modèle





Bruit de mesures 1% et incertitude de modèle (données SENSO)

En résumé. Les quelques points abordés

- Description des aléas par des lois empiriques. Possibilité de procéder à des changements d'échelle (données micro ➔ réponse macro)
- Question de l'échantillonnage : pour l'estimation des propriétés, pour la qualité des prédictions à partir des valeurs estimées
- Question de la qualité des modèles, établis à partir des données en nombre limité (incertitude de modèle)

D’autres points essentiels

- La notion de corrélation entre propriétés (p.ex. C et phi dans un sol : physique ? Statistique ?)
- La notion de corrélation spatiale

A retenir :

- savoir ce que l’on veut et adapter ses moyens (d’acquisition de données et de modélisation) à ses objectifs
- avoir conscience des limites des approches déterministes… et probabilistes !